**Mètodes Matemàtics II** **Any Acadèmic 2007-08**

Nom: ______________________________

DNI: ______________________________

1. Sean $z_1 = 2i$ y $z_2 = \sqrt{3} - i$.

   (a) [0.5 puntos] Hallar $|z_1 + z_2|^2$:
   A. 4 B. 2 C. $-4$ D. 7

   **Solución:** A.

   (b) [0.5 puntos] Hallar $\arg(z_1 z_2)$:
   A. $2n\pi$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{3} + 2n\pi$ D. $\frac{\pi}{6} + 2n\pi$

   **Solución:** C.

   (c) [0.5 puntos] Hallar $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$:
   A. $-\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $-\frac{5\pi}{6}$ D. $-\frac{\pi}{3} + 2n\pi$

   **Solución:** B.

2. [1.5 puntos] Sea $f(z) = \arg\left(e^{iz}\right)$. Entonces:
   A. $f$ es analítica para todo $z$ tal que $\operatorname{Im}(z) = 0$
   B. $f$ es entera
   C. $f$ es derivable en $z = 0$
   D. $f$ no es derivable

   **Solución:** Sustituyendo $z = x + iy$, obtenemos $f(z) = \arg\left(e^{-y}e^{ix}\right) = x$. Por tanto, $u(x,y) = x$ y $v(x,y) = 0$. Aplicando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se deduce que la respuesta correcta es la D.

3. Sea $\operatorname{Re} f = u(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$.

   (a) [1 punto] Hallar su armónica conjugada:
   A. No tiene
   B. $v(x,y) = \operatorname{sen} y \operatorname{senh} y$
   C. $v(x,y) = -\cos x \cosh y$
   D. $v(x,y) = \cos x \cosh y$

   **Solución:** D.

   (b) [1 punto] Hallar $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$:
   A. $\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y - i \cos x \cosh y$ B. No existe C. $i \cos z$ D. $-i \cosh z$

**Solución:** De la solución anterior se tiene que $f(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y + i \cos x \cosh y$. Utilizando las definiciones de las funciones trignonométricas e hiperbólicas, se obtiene, tras simplificar, la respuesta C.

4. [2 puntos] Hallar todas las raíces de la ecuación $\operatorname{sen} z = \cosh 2$:
   A. $z = \operatorname{arcsenh}(\cosh 2)$
   B. $z = 2i(\cosh 2 + n\pi)$
   C. $z = 2 - i\pi\left(2n + \frac{1}{2}\right)$
   D. $z = \pi\left(2n + \frac{1}{2}\right) + 2i$

**Solución:** Como $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \operatorname{senh} y \cos x$ e igualando partes reales e imaginarias, se deduce que $x = (2n + 1/2)\pi$ e $y = 2$. Luego la respuesta correcta es la D.

5. Escribir en forma cartesiana ($z = a + ib$) los siguientes números:
   (a) [0.75 puntos] $\operatorname{tg}(2i)$
   A. $-i \operatorname{tg} 2$ B. $\operatorname{tgh} 2$ C. $i \operatorname{tgh} 2$ D. $-i \operatorname{tgh} 2$

   **Solución:** C.

   (b) [0.75 puntos] $\operatorname{senh}(1 + \pi i)$
   A. $-\operatorname{senh} 1$ B. $\operatorname{sen} 1$ C. $i \operatorname{sen} 1$ D. $-i \cosh \pi$

   **Solución:** A.

6. Hallar el valor principal de las siguientes expresiones:
   (a) [0.75 puntos] $\sqrt[i]{1-i}$
   A. $e^{-\pi/4}(\cos \ln \sqrt{2} - i \operatorname{sen} \ln \sqrt{2})$
   B. $e^{-\pi/4}(\cos \ln 2 - i \operatorname{sen} \ln 2)$
   C. $e^{\pi/4}(\cos \ln \sqrt{2} - i \operatorname{sen} \ln \sqrt{2})$
   D. $e^{-\pi/4}(\cos \ln 2 + i \operatorname{sen} \ln 2)$

   **Solución:** Expresamos $z = \sqrt[i]{1-i} = (1-i)^{1/i}$ en términos de las funciones exponencial y logaritmo: $z = e^{-i \ln(1-i)}$. Aplicando la definición de la función logaritmo y usando la fórmula de Euler para simplificar la exponencial, se obtiene la respuesta A.

   (b) [0.75 puntos] $\operatorname{arccosh} \frac{1}{\sqrt{2}}$ (ayuda: $\operatorname{arccosh} z = \ln[z \pm \sqrt{z^2 - 1}]$)
   A. $-i\frac{\pi}{4}$ B. $-\frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{\pi}{4}$ C. $-\frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}$ D. $i\frac{\pi}{4}$

   **Solución:** D.