Mètodes Matemàtics II Exàmen de Juny **Any Acadèmic 2007-08**

Nom: ____________________

DNI: ____________________

NOTA: Los alumnos que tengan que examinarse del primer parcial deberán hacer únicamente los ejercicios 1 [1.5 puntos], 2(b) [1.5 puntos], 3(a) [1.5 puntos], 3(b) [1.5 puntos] y 3(c) [4 puntos].

1. [1 punto] Ordenar de menor a mayor las partes reales de los siguientes números complejos:

$$(-1)^i\,, \qquad \operatorname{senh}(\pi i)\,, \qquad i\ln\sqrt{-1+i}\,.$$

Tomar el valor principal del logaritmo cuando proceda.

> **Solución:** Para calcular la parte real, expresamos los números complejos en forma cartesiana:
>
> $$(-1)^i = e^{i\ln(-1)} = e^{i(\ln|1|+i\pi)} = e^{-\pi}$$
> $$\operatorname{senh}(\pi i) = i\operatorname{sen}\pi = 0$$
> $$i\ln\sqrt{-1+i} = \frac{i}{2}\ln(-1+i) = \frac{i}{2}\left(\ln\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi}{8} + \frac{i}{4}\ln 2$$
>
> Luego $\mathrm{Re}[i\ln\sqrt{-1+i}] < \mathrm{Re}[\operatorname{senh}(\pi i)] < \mathrm{Re}[(-1)^i]$.

2. Hallar **todas** las soluciones posibles de las siguientes ecuaciones:

(a) [1 punto] $\operatorname{sen} z = i\operatorname{senh} 4$.

> **Solución:** Escribimos $z = x + iy$ y, sustituyendo en la relación anterior, obtenemos dos ecuaciones tras igualar partes reales e imaginarias:
>
> $$\operatorname{sen} x\cosh y = 0$$
> $$\cos x\operatorname{senh} y = \operatorname{senh} 4$$
>
> De la segunda ecuación se tiene que $y = 4$ y $x = 2n\pi$, donde $n = 0, \pm1, \pm2, \dots$ Otra posible solución es $y = -4$ y $x = (2n+1)\pi$. En ambos casos se satisface la primera ecuación. Por tanto, la solución más general es $z = 2n\pi + 4i$ y $z = (2n+1)\pi - 4i$.

(b) [1 punto] $i^z = e^{1+i\pi z}$.

> **Solución:** Aplicamos la definición de exponentes complejos al miembro izquierdo de la ecuación:
> $$i^z = e^{z\ln i} = e^{z[\ln|1|+i(\pi/2+2n\pi)]}$$

donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Igualando los exponentes de ambos términos, se obtiene la relación

$$iz(\pi/2 + 2n\pi) = 1 + i\pi z$$

Por tanto, la solución más general es

$$z = -\frac{i}{2n\pi - \pi/2}$$

3. Sea la función compleja

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)^2}$$

(a) [1 punto] Hallar la serie de Laurent asociada a f en el dominio $\mathcal{D} : 0 < |z+1| < 1$.

Solución:

$$f(z) = (z+1)^{-2}\frac{1}{z} = -(z+1)^{-2}\frac{1}{1-(z+1)}$$

$$= -(z+1)^{-2}[1 + (z+1) + (z+1)^2 + (z+1)^3 + \ldots] = -\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^{n-2}$$

donde hemos utilizado la serie geométrica de $1/[1-(z+1)]$, válida para $|z+1| < 1$, que corresponde justamente al dominio del enunciado.

(b) [1 punto] Clasificar las singularidades de f y calcular los residuos correspondientes.

Solución: El punto $z = -1$ es un polo doble cuyo residuo se deduce inmediatamente de la serie de Laurent hallada anteriormente: $\mathrm{Res}(f, -1) = -1$.
El punto $z = 0$ es un polo simple y su residuo es $\mathrm{Res}(f, 0) = \lim_{z\to 0} zf(z) = 1$.

(c) [2.5 puntos] Determinar la integral

$$I = \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-1}\, dz\,,$$

donde $\mathcal{C}$ es el contorno descrito por la ecuación $|z| = 2$. Demostrar que $I \neq 2\pi i f(1)$ y razonar si este resultado contradice la fórmula de Cauchy.

Solución: Sea $g(z) = f(z)/(z-1)$, que es una función meromórfica en $\mathbb{C}$ con singularidades aisladas en $z = 0, 1, -1$. Calculamos I mediante el teorema de los residuos:

$$I = 2\pi i \sum \mathrm{Res}$$

donde los residuos son:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}(g,0) &= \lim_{z\to 0} z g(z) = -1 \\
\mathrm{Res}(g,1) &= \lim_{z\to 1} (z-1) g(z) = \frac{1}{4} \\
\mathrm{Res}(g,-1) &= \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz}(z+1)^2 g(z) = \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Luego $I = 0$. El resultado es diferente de $2\pi i f(1) = \pi i/2$, valor que obtendríamos si aplicáramos la fórmula de Cauchy a $f(z)$. Pero una de las condiciones para aplicar dicha fórmula es que f sea analítica en $\mathcal{C}$. Como f evidentemente no lo es, no se puede aplicar la fórmula de Cauchy y no existe, por tanto, contradicción alguna.

4. [2.5 puntos] Hallar la siguiente integral utilizando el método de los residuos:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{5 - 4\cos\theta}\, d\theta\,.$$

Solución: Empleamos la sustitución $z = e^{i\theta}$. De esta forma, la integral real se transforma en una integral en $\mathbb{C}$ alrededor de la circunferencia de radio unidad $\mathcal{C} : |z| = 1$:

$$I = \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{z - z^{-1}}{2i}\right)^2 \frac{1}{5 - 2z - 2z^{-1}} \frac{dz}{iz} = -\frac{i}{8} \int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz$$

donde hemos definido

$$f(z) = \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^2(z^2 - 5z/2 + 1)}$$

Esta función tiene un polo doble en $z = 0$ y polos simples en $z = 1/2$ y $z = 2$ (que está fuera del contorno y no contribuye, pues, a la integral). Calculamos los residuos correspondientes:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f,0) &= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} z^2 f(z) = \frac{5}{2} \\
\mathrm{Res}(f,1/2) &= \lim_{z\to 1/2} (z-1/2) f(z) = -\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Finalmente, aplicamos el teorema de los residuos:

$$I = -\frac{i}{8} 2\pi i [\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,1/2)] = \frac{\pi}{4}$$