

Nom: _____

DNI: _____

1. [2 puntos] Representar gràficament els següents nombres complexos:

$$(a) \frac{1+2i}{3-4i} \quad (b) \operatorname{Im} \left[\frac{2}{(1+i)^2} \right] \quad (c) (-64)^{1/4} \quad (d) (-i)^{2/\pi}$$

Tomar la determinación principal cuando proceda.

Solución: Reducimos los cuatro números a su forma cartesiana:

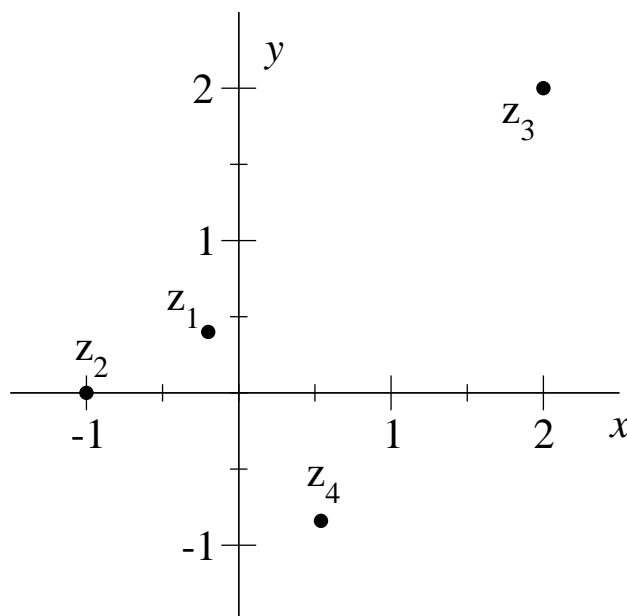
$$(a) z_1 = \frac{1+2i}{3-4i} = \frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{-5+10i}{3^2+4^2} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$

$$(b) z_2 = \operatorname{Im} \left[\frac{2}{(1+i)^2} \right] = \operatorname{Im} \left[\frac{2}{2i} \right] = \operatorname{Im}(-i) = -1$$

$$(c) z_3 = (-64)^{1/4} = (-2^6)^{1/4} = 2^{3/2}(-1)^{1/4} = 2^{3/2}e^{i\pi/4} = 2^{3/2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) = 2 + 2i$$

$$(d) z_4 = (-i)^{2/\pi} = e^{\frac{2}{\pi} \ln(-i)} = e^{-i} = \cos 1 - i \operatorname{sen} 1 \simeq 0.54 - 0.84i$$

La representación en el plano \mathbb{C} puede verse a continuación.



2. Sea

$$f(z) = \frac{\sinh(\pi z/2)}{z^3 + z}$$

(a) [2 puntos] Clasificar las singularidades de $f(z)$ y calcular los residuos correspondientes.

Solución: La función es analítica en todo \mathbb{C} salvo en aquellos puntos que anulen el denominador. Reescribimos éste como $z^3 + z = z(z^2 + 1) = z(z + i)(z - i)$. Por tanto, las singularidades son $z = 0$, $z = i$ y $z = -i$.

- $z = 0$ es un cero de orden 1 del numerador y del denominador. Por tanto, esta singularidad es *evitable* y su residuo es automáticamente cero.
- $z = i$ no anula el numerador y es un cero de orden 1 del denominador. Luego $z = i$ es un *polo simple* cuyo residuo vale

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i)f(z) = \frac{\sinh(\pi i/2)}{i(i + i)} = -\frac{i}{2}$$

- $z = -i$ no anula el numerador y es un cero de orden 1 del denominador. Luego $z = -i$ es un *polo simple* cuyo residuo vale

$$\text{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} (z + i)f(z) = \frac{\sinh(-\pi i/2)}{(-i)(-i - i)} = \frac{i}{2}$$

(b) [2 puntos] Dar, sin hacer cálculos, todos los coeficientes b_n de la parte principal de la serie de Laurent asociada a f alrededor de $z = 0$.

Solución: Puesto que $z = 0$ es una singularidad evitable, todos los coeficientes b_n son, por definición, nulos.

3. [4 puntos] Sea

$$I = \int_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z^3 + z} dz$$

siendo \mathcal{C} la circunferencia, orientada positivamente, de radio 2 y centrada en el origen. Calcular I y demostrar que I es un número imaginario puro.

Solución: Las singularidades de f se localizan en $z = 0$, $z = i$ y $z = -i$. Las tres son polos simples. Calculamos sus residuos correspondientes:

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i)f(z) = -\frac{e^i}{2}$$

$$\text{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} (z + i)f(z) = -\frac{e^{-i}}{2}$$

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = 1$$

De acuerdo al teorema de los residuos, la integral anterior vale

$$I = 2\pi i \sum \text{Res} = 2\pi i \left(1 - \frac{e^i}{2} - \frac{e^{-i}}{2} \right) = 2\pi i(1 - \cos 1) \simeq 2.89i$$

Por tanto, $\text{Re } I = 0$, de ahí que I sea un número imaginario puro.

Ayuda: Pueden resultar útiles los siguientes valores numéricos:

$$\text{sen } 1 \simeq 0.84$$

$$\text{cos } 1 \simeq 0.54$$