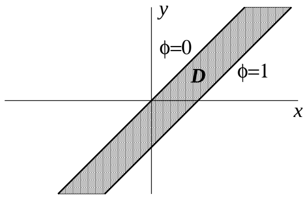
Mètodes Matemàtics II Exàmen de Juny **Any Acadèmic 2008-09**

Nom: ______________________________

DNI: ______________________________

1. Sea
$$f(z) = \ln(z) + \frac{\pi}{2}\frac{1}{\operatorname{senh}(\pi z)}$$
   (a) [1 punto] Analizar el dominio de analiticidad de f.
   (b) [1 punto] Expresar $f(i/2)$ en forma cartesiana.

2. Sea $\mathcal{D}$ la región comprendida entre dos placas conductoras representadas por las rectas $y = x$ e $y = x - \sqrt{2}/2$. El potencial ϕ se fija en las placas tal y como figura en el dibujo.



   (a) [1 punto] Hallar $\phi(x, y)$ en el dominio $\mathcal{D}$ utilizando la transformación $w = e^{i\pi/4}z$.
   (b) [1 punto] Esbozar las superficies equipotenciales y las líneas de campo asociadas.

3. Sea
$$f(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + i2axy$$
donde a es una constante real.
   (a) [1 punto] Hallar a para que f sea analítica en $\mathbb{C}$ y expresar f únicamente en términos de la variable compleja z. *Ayuda: utilizar las relaciones* $x = (z + z^*)/2$, $y = (z - z^*)/(2i)$.
   (b) [1 punto] Sea $\mathcal{C}$ el segmento de recta que une los puntos $z_0 = -i$ y $z_1 = i$. Calcular la integral
$$I = \int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz$$
   siendo f la función calculada en el apartado anterior.
   (c) [1 punto] Demostrar que $I \neq 0$. Dado que f es analítica, ¿implica este resultado una contradicción con el Teorema de Cauchy-Goursat? Razonar la respuesta.

4. [3 puntos] Sea
$$f(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2 - 2ix - 2}\, dx$$
donde α es real. Determinar f para $\alpha > 0$ y $\alpha < 0$.