

Nom: \_\_\_\_\_

DNI: \_\_\_\_\_

1. Sea la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$f(\theta) = \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}.$$

Expresar los siguientes números complejos en forma cartesiana, tomando la determinación principal del logaritmo cuando proceda:

- (a) [0.5 puntos]  $f(\pi/4)$   
(b) [0.5 puntos]  $\ln(1 - f(\pi/2))$   
(c) [1 punto]  $(1 - f(\pi))^{2/\pi}$
2. (a) [1 punto] Sea  $u(x, y) = -x^2 - ax^2y + y^2 + y^3$  donde  $a$  es una constante. Hallar  $a$  para que  $u$  sea armónica y encontrar su armónica conjugada  $v(x, y)$ .  
(b) [1 punto] Sea  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  con las funciones  $u$  y  $v$  encontradas en el apartado anterior. Dar el dominio de analiticidad de  $f$  y calcular  $f'$  en el punto  $z = \sqrt{2}e^{-3i\pi/4}$ .
3. Se define la función compleja  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de la siguiente forma:

$$f(z) = \int_{\mathcal{C}} \frac{\operatorname{senh}^2(w/2)}{(w - z)^2} dw,$$

siendo  $\mathcal{C}$  el contorno descrito por la ecuación  $|w| = 2$ .

- (a) [1 punto] Hallar el valor de  $f(i\pi/2)$ , simplificando todo lo que se pueda.  
(b) [1 punto] Razonar si  $f$  es analítica en el origen y, en caso afirmativo, dar el valor de  $f'(0)$ .  
(c) [1 punto] Determinar  $f(z)$  para todo  $z$  tal que  $|z| > 2$ .
4. [3 puntos] Calcular la siguiente integral mediante el método de los residuos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x^3 + x} dx.$$