

Nom: \_\_\_\_\_

DNI: \_\_\_\_\_

1. Sea la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$f(\theta) = \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}.$$

Expresar los siguientes números complejos en forma cartesiana, tomando la determinación principal del logaritmo cuando proceda:

- (a) [0.5 puntos]  $f(\pi/4)$

**Solución:**  $f$  es un cociente de números complejos. Multiplicando arriba y abajo por el conjugado del denominador, se obtiene la expresión simplificada

$$f(\theta) = i \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 - \operatorname{cos} \theta}$$

Sustituyendo  $\theta$  por  $\pi/4$  tenemos que

$$f(\pi/4) = i \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = i(1 + \sqrt{2})$$

- (b) [0.5 puntos]  $\ln(1 - f(\pi/2))$

**Solución:** De la expresión anterior, se deduce que  $f(\pi/2) = i$ . Por tanto,

$$\ln(1 - f(\pi/2)) = \ln(1 - i) = \ln \sqrt{2} - i \frac{\pi}{4}$$

en la determinación principal del logaritmo.

- (c) [1 punto]  $(1 - f(\pi))^{2/\pi}$

**Solución:** Sabemos que  $f(\pi) = 0$ . Entonces,

$$(1 - f(\pi))^{2/\pi} = 1^{2/\pi} = e^{(2/\pi) \ln 1} = 1$$

en la determinación principal del logaritmo.

2. (a) [1 punto] Sea  $u(x, y) = -x^2 - ax^2y + y^2 + y^3$  donde  $a$  es una constante. Hallar  $a$  para que  $u$  sea armónica y encontrar su armónica conjugada  $v(x, y)$ .

**Solución:** Imponiendo  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ , se obtiene  $a = 3$ . Las ecuaciones de Cauchy-Riemann llevan a la siguiente expresión para la armónica conjugada de  $u$ :

$$v(x, y) = x^3 - 2xy - 3xy^2$$

- (b) [1 punto] Sea  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  con las funciones  $u$  y  $v$  encontradas en el apartado anterior. Dar el dominio de analiticidad de  $f$  y calcular  $f'$  en el punto  $z = \sqrt{2}e^{-3i\pi/4}$ .

**Solución:** Como  $u$  y  $v$  satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann,  $f$  es analítica en todo  $\mathbb{C}$  y su derivada es

$$f' = (-2x - 6xy) + i(3x^2 - 2y - 3y^2)$$

El punto  $z = \sqrt{2}e^{-3i\pi/4}$  en coordenadas rectangulares toma la forma  $z = -1 - i$ . Luego sustituimos  $x = -1$  e  $y = -1$  en la expresión anterior y encontramos que  $f(\sqrt{2}e^{-3i\pi/4}) = -4 + 2i$ .

3. Se define la función compleja  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de la siguiente forma:

$$f(z) = \int_{\mathcal{C}} \frac{\sinh^2(w/2)}{(w-z)^2} dw,$$

siendo  $\mathcal{C}$  el contorno descrito por la ecuación  $|w| = 2$ .

- (a) [1 punto] Hallar el valor de  $f(i\pi/2)$ , simplificando todo lo que se pueda.

**Solución:** Sea la función  $g(w) = \sinh^2(w/2)$ , que es analítica en  $\mathcal{C}$  y dentro de  $\mathcal{C}$ . Entonces, para todo  $z$  interior a  $\mathcal{C}$ , podemos hacer uso de la fórmula generalizada de Cauchy,

$$f(z) = 2\pi i g'(z) = 2\pi i \sinh \frac{z}{2} \cosh \frac{z}{2} = \pi i \sinh z$$

El punto  $z = i\pi/2$  es interior a  $\mathcal{C}$ . Luego

$$f(i\pi/2) = \pi i \sinh(\pi i/2) = -\pi \sin(\pi/2) = -\pi$$

- (b) [1 punto] Razonar si  $f$  es analítica en el origen y, en caso afirmativo, dar el valor de  $f'(0)$ .

**Solución:** Para todo  $z$  interior a  $\mathcal{C}$ ,  $f$  es una función analítica. Toda función analítica posee derivadas a todo orden, y éstas son analíticas. Como el origen está dentro de  $\mathcal{C}$ ,  $f$  es analítica en  $z = 0$ . Calculamos la primera derivada de  $f$ :

$$f'(z) = 2\pi i g''(z) = \pi i \cosh z$$

En consecuencia,  $f'(0) = \pi i$ .

- (c) [1 punto] Determinar  $f(z)$  para todo  $z$  tal que  $|z| > 2$ .

**Solución:** Cuando  $z$  está fuera del contorno  $\mathcal{C}$ , el integrando es una función analítica en  $\mathcal{C}$  y dentro de  $\mathcal{C}$ . Se deduce del teorema de Cauchy-Goursat que la integral se anula y, por tanto,  $f(z) = 0$  para todo  $|z| > 2$ .

4. [3 puntos] Calcular la siguiente integral mediante el método de los residuos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x^3 + x} dx.$$

**Solución:** Utilizamos la fórmula de Euler para expresar la integral en la forma

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x^3 + x} dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi x}}{x^3 + x} dx$$

Sea la función

$$f(z) = \frac{e^{i\pi z}}{z^3 + z}$$

que tiene polos simples en  $0$ ,  $i$  y  $-i$ . Elegimos el contorno usual (véase la figura 6.3 de los apuntes de clase):

$$\int_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}_R} + \int_{-R}^{-\rho} + \int_{\mathcal{C}_\rho} + \int_{\rho}^R$$

donde  $R \rightarrow \infty$  y  $\rho \rightarrow 0$ . La integral a lo largo del contorno  $\mathcal{C}_R$  se anula por el lema de Jordan (grado del denominador  $n = 3$ , grado del numerador  $n = 0$ ; se cumple  $n \geq m + 1$ ). Calculamos los residuos asociados a los polos que contribuyen a la integral:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 0) &= 1 \\ \operatorname{Res}(f, i) &= -\frac{1}{2}e^{-\pi} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\mathcal{C}_\rho} &= -\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = -\pi i \\ \int_{\mathcal{C}} &= 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = -\pi i e^{-\pi} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = -i\pi e^{-\pi} + \pi i = \pi i(1 - e^{-\pi})$$

de donde se tiene que  $I = \operatorname{Im} J = \pi(1 - e^{-\pi})$ .