1. Oscilaciones de Rabi

El objetivo de este trabajo consiste en investigar la dinámica de un sistema de dos niveles sujeto a un campo externo que oscila con el tiempo.

Sean $|1\rangle$ y $|2\rangle$ los dos estados posibles de un átomo con energías ε_1 y ε_2, respectivamente, tales que $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Definimos la frecuencia característica del sistema como

$$\omega_0 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\hbar}$$

El átomo está inmerso en un campo eléctrico que puede causar transiciones entre $|1\rangle$ y $|2\rangle$. Por simplificar, consideramos que sólo existe un único modo en el campo. En la aproximación dipolar, se puede despreciar la dependencia espacial del campo y, manteniendo los términos que conservan la energía, el potencial de acoplo toma la forma

$$V(t) = \gamma e^{i\omega t}|1\rangle\langle 2| + \gamma e^{-i\omega t}|2\rangle\langle 1|$$

donde ω es la frecuencia del campo eléctrico oscilante y γ es una constante real que depende de la intensidad del campo y del momento dipolar eléctrico.

1. En presencia del campo, la función de onda más general es

$$|\psi(t)\rangle = c_1(t)|1\rangle + c_2(t)|2\rangle$$

Sustituir en la ecuación de Schrödinger y proyectar sobre $\langle 1|$ y $\langle 2|$ para obtener un sistema de dos ecuaciones acopladas para $c_1(t)$ y $c_2(t)$. Tomar

$$\begin{aligned} c_1(t) &= a_1(t)e^{-i\varepsilon_1 t/\hbar} \\ c_2(t) &= a_2(t)e^{-i\varepsilon_2 t/\hbar} \end{aligned}$$

y demostrar que el sistema de ecuaciones puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \dot{a}_1(t) &= -i\Omega a_2(t)e^{i(\omega-\omega_0)t} \\ \dot{a}_2(t) &= -i\Omega a_1(t)e^{-i(\omega-\omega_0)t} \end{aligned}$$

donde $\Omega = \gamma/\hbar$. Resolver este sistema exactamente suponiendo que a $t = 0$ sólo está ocupado el nivel de abajo: $c_1(0) = 1$ y $c_2(0) = 0$. Entonces, demostrar que la probabilidad de encontrar al átomo en el nivel más alto viene dada por la fórmula de Rabi:

$$|c_2(t)|^2 = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + (\omega-\omega_0)^2/4}\sin^2\left(\sqrt{\Omega^2 + (\omega-\omega_0)^2/4}\,t\right)$$

Comprobar que $|c_1(t)|^2 + |c_2(t)|^2 = 1$ a todo tiempo t.

2. Representar $|c_1(t)|^2$ para el caso especial en que el átomo está en resonancia con el campo externo ($\omega_0 = \omega$) y dar una interpretación física a los ciclos obtenidos (*oscilaciones de Rabi*). Repetir la discusión para el caso general $\omega_0 \neq \omega$ y calcular el máximo valor que puede alcanzar $|c_2(t)|^2$ en función de la frecuencia ω del campo.

3. Aplicar las ideas expuestas anteriormente al modo operativo de un láser. Para ello, suponer que el átomo está inicialmente en el estado $|2\rangle$ y calcular el coeficiente de inversión $W(t) = |c_2(t)|^2 - |c_1(t)|^2$. Ilustrar gráficamente los procesos de absorción y emisión estimulada.

4. Una aplicación inmediata del problema anterior consiste en considerar los estados $|1\rangle$ y $|2\rangle$ como los dos estados de polarización de un espín 1/2 ($|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$). Suponer que el espí están en presencia de un campo magnético uniforme B_0 en la dirección z y hallar la frecuencia característica del sistema. Después, analizar la respuesta del espín ante un campo magnético oscilante $B(t)$ en el plano x–y. Demostrar que el espín sufre una serie periódica de procesos de *spin-flip* entre $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$. Investigar cuál es el papel que desempeña este efecto en la técnica denominada *resonancia magnética nuclear*.