

Nom: _____

DNI: _____

1. [2 puntos] Dado el número complejo

$$z = \left[\operatorname{Arg} \left(\sqrt{\frac{1}{i}} \right) \right]^{\ln i}$$

demostrar que $|z| < 1$, tomando el valor principal del logaritmo cuando proceda.

2. (a) [2 puntos] Sea

$$f(z) = \frac{1}{(z - 1/2)^2(2z - i)}$$

Hallar las singularidades de $f(z)$, clasificarlas y calcular los residuos correspondientes.

- (b) [2 puntos] Demostrar que

$$\int_{\mathcal{C}:|z|=1} \frac{1}{z} \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz = 0$$

A la luz del teorema de Cauchy-Goursat, ¿implica este resultado que el integrando es una función analítica para todo z interior a \mathcal{C} ? Razonar la respuesta.

3. [4 puntos] Sea f una función analítica en todo \mathbb{C} . Hallar la integral

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2 \theta d\theta$$

sabiendo que $f(0) = 1/\pi$ y $f''(0) = 4/\pi$.