Mètodes Matemàtics II Exàmen de Setembre **Any Acadèmic 2007-08**

Nom: ______________________________

DNI: ______________________________

1. [2 puntos] Dado el número complejo

$$z = \left[\operatorname{Arg}\left(\sqrt{\frac{1}{i}}\right)\right]^{\ln i}$$

demostrar que $|z| < 1$, tomando el valor principal del logaritmo cuando proceda.

Solución: Sea $w = \sqrt{1/i}$. Entonces,

$$w = \sqrt{-i} = e^{\frac{1}{2}\ln(-i)} = e^{-i\pi/4}$$

donde hemos tomado el valor princial del logaritmo. Por tanto, $\operatorname{Arg} w = -\pi/4$. Calculamos z:

$$z = \left(-\frac{\pi}{4}\right)^{\ln i} = \left(-\frac{\pi}{4}\right)^{i\pi/2} = e^{i\frac{\pi}{2}\ln(-\pi/4)} = e^{-\pi^2/2}e^{i\frac{\pi}{2}\ln(\pi/4)}$$

Luego $|z| = e^{-\pi^2/2} < 1$.

2. (a) [2 puntos] Sea

$$f(z) = \frac{1}{(z-1/2)^2(2z-i)}$$

Hallar las singularidades de $f(z)$, clasificarlas y calcular los residuos correspondientes.

Solución: f tiene un polo doble en $z = 1/2$ y un polo simple en $z = i/2$. Determinamos sus residuos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, 1/2) &= \lim_{z\to 1/2}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z-1/2)^2}f(z)\right] = \lim_{z\to 1/2}\frac{-2}{(2z-i)^2} = -i \\
\operatorname{Res}(f, i/2) &= \lim_{z\to i/2}(z-i/2)f(z) = \lim_{z\to i/2}\frac{1}{2}\frac{1}{(z-1/2)^2} = i
\end{aligned}$$

(b) [2 puntos] Demostrar que

$$\int_{\mathcal{C}:|z|=1}\frac{1}{z}\operatorname{sen}\frac{1}{z}\,dz = 0$$

A la luz del teorema de Cauchy-Goursat, ¿implica este resultado que el integrando es una función analítica para todo z interior a $\mathcal{C}$? Razonar la respuesta.

Solución: Sea la función

$$f(z) = \frac{1}{z} \operatorname{sen} \frac{1}{z}$$

que es analítica en $\mathcal{C}$ salvo en la singularidad esencial $z = 0$. Calculamos unos cuantos términos de la serie de Laurent correspondiente:

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots\right) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!z^4} + \frac{1}{5!z^6} - \dots$$

Por tanto, $\operatorname{Res}(f, 0) = 0$. Esto implica que la integral es cero. Sin embargo, f no es analítica para todo z dentro de $\mathcal{C}$ debido a la singularidad en $z = 0$. El teorema de Cauchy-Goursat establece que la integral de una función analítica a lo largo de un contorno cerrado es cero, aunque la afirmación inversa no tiene por qué cumplirse.

3. [4 puntos] Sea f una función analítica en todo $\mathbb{C}$. Hallar la integral

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2 \theta \, d\theta$$

sabiendo que $f(0) = 1/\pi$ y $f''(0) = 4/\pi$.

Solución: Hacemos el cambio de variables $z = e^{i\theta}$, pasando de una integral sobre una variable real a una integral en $\mathcal{C}$ a lo largo del contorno $\mathcal{C} : |z| = 1$:

$$I = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2 \theta \, d\theta = \int_{\mathcal{C}} f(z) \left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right)^2 \frac{dz}{iz}$$

Entonces,

$$I = \frac{1}{4i}\left[\underbrace{\int_{\mathcal{C}} f(z) z \, dz}_{I_1} + \underbrace{\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z^3} \, dz}_{I_2} + 2\underbrace{\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z} \, dz}_{I_3}\right]$$

Ahora bien, $I_1 = 0$ por el teorema de Cauchy-Goursat. Las otras dos integrales pueden calcularse a partir de la fórmula de Cauchy:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2\pi i}{2!} f''(0) = 4i \\ I_3 &= 2\pi i f(0) = 2i \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores arriba, encontramos que $I = 2$.